# BAB 6

# GRAF

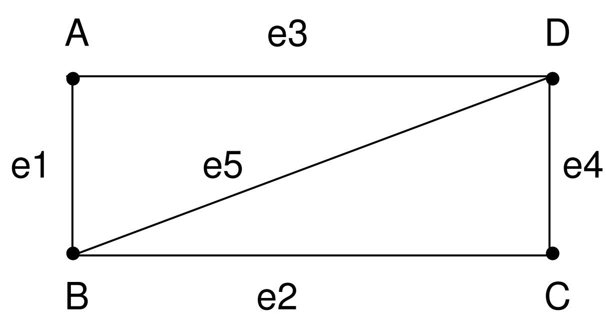
Graf adalah :

- ♦ Himpunan V (Vertex) yang elemennya disebut simpul (atau point atau node atau titik)
- ♦ Himpunan E (Edge) yang merupakan pasangan tak urut dari simpul, anggotanya disebut ruas (rusuk atau sisi)

Notasi : G(V,E)

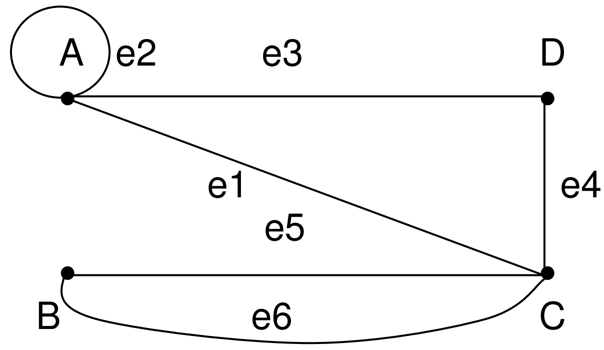
Simpul u dan v disebut berdampingan bila terdapat ruas (u,v).
Graf dapat pula disajikan secara geometrik, simpul disajikan sebagai sebuah titik, sedangkan ruas disajikan sebagai sebuah garis yang menghubungkan 2 simpul.

**Contoh 1 :**
Graf G(V,E) dengan :
1. V terdiri dari 4 simpul, yaitu simpul A, B, C dan D
2. E terdiri dari 5 ruas, yaitu e1 = (A, B)    e2 = (B, C)    e3 = (A, D)
   e4 = (C, D)    e5 = (B, D)




Banyak simpul disebut **ORDER**, banyak ruas disebut **SIZE** dari graf.
Graf yang lebih umum disebut Multigraf

**Contoh 2 :**
Graf G(V,E) dengan :
1. V terdiri dari 4 simpul, yaitu simpul A, B, C dan D
2. E terdiri dari 6 ruas, yaitu e1 = (A, C)    e2 = (A, A)    e3 = (A, D)
   e4 = (C, D)    e5 = (B, C)     e6 = (B, C)

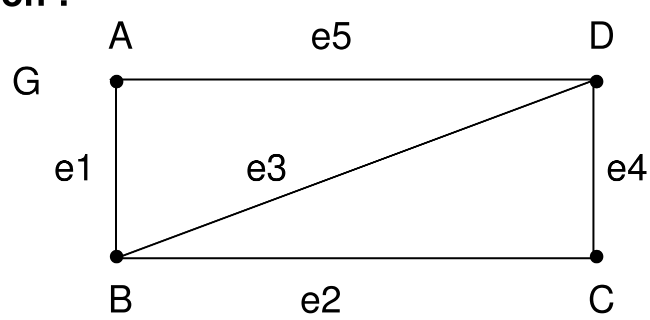


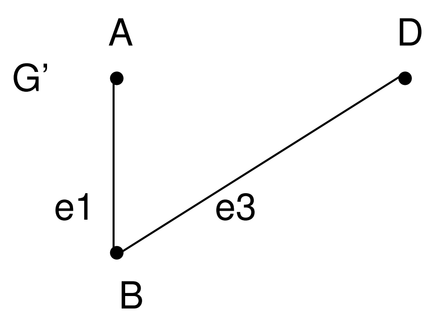
Di sini ruas e2 kedua titik ujungnya adalah simpul yang sama, yaitu simpul A, disebut Gelung atau Self-Loop. Sedangkan ruas e5 dan e6 mempunyai titik ujung yang sama, yaitu simpul B dan C, disebut Ruas Berganda atau Ruas Sejajar.

Suatu graf yang tidak mengandung ruas sejajar ataupun self-loop disebut Graf Sederhana atau Simple Graf.

Suatu graf G'(V',E') disebut subgraf dari G(V,E), jika V' himpunan bagian dari V dan E' himpunan bagian dari E.
Jika E' mengandung semua ruas dari E yang titik ujungnya di V', maka G' disebut subgraf yang direntang oleh V' (Spanning subgraf).

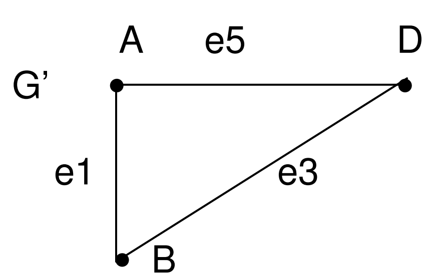
**Contoh :**




G' subgraf dari G
(namun bukan dibentuk
oleh V' = {A,B,D})

G' subgraf yang dibentuk oleh V' = (A,B,D)




## GRAF BERLABEL

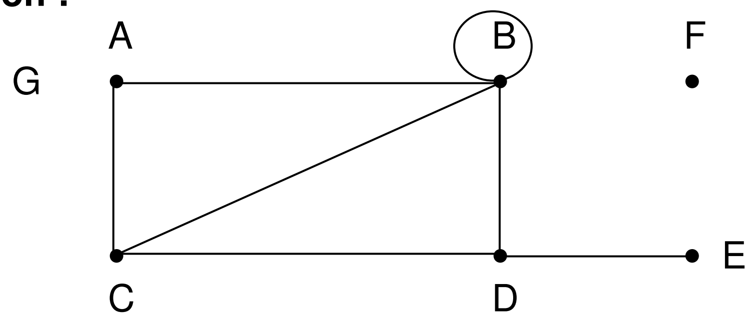
Graf G disebut graf berlabel jika ruas dan atau simpulnya dikaitkan dengan suatu besaran tertentu. Jika setiap ruas e dari G dikaitkan dengan suatu bilangan non negatif d(e), maka d(e) disebut *bobot* atau *panjang* dari ruas e.

## DERAJAT GRAF

Derajat simpul V, ditulis d(v) adalah banyaknya ruas yang menghubungi v. Karena setiap ruas dihitung dua kali ketika menentukan derajat suatu graf, maka :
*Jumlah derajat semua simpul suatu graf (derajat) = dua kali banyaknya ruas graf (size graf).*

Suatu simpul disebut genap/ganjil tergantung apakah derajat simpul tersebut genap/ganjil. Kalau terdapat self-loop, maka self-loop dihitung 2 kali pada derajat simpul.

**Contoh :**




Di sini banyaknya ruas = 7, sedangkan derajat masing-masing simpul adalah :

| | | |
|---|---|---|
| d(A) = 2 | d(D) = 3 | derajat graf G = 14 |
| d(B) = 5 | d(E) = 1 | (2 * 7) |
| d(C) = 3 | d(F) = 0 | |

**Catatan :** E disebut simpul bergantung/akhir, yakni simpul yang berderajat satu. Sedangkan F disebut simpul terpencil, yakni simpul berderajat nol.

## KETERHUBUNGAN

***Walk*** atau perjalanan dalam graf G adalah barisan simpul dan ruas berganti-ganti : $v_1$, $e_1$, $v_2$, $e_2$, …, $e_{n-1}$, $v_n$
Di sini ruas $e_1$ menghubungkan simpul $v_i$ dan $v_{I+1}$

Banyaknya ruas disebut panjang walk.
Walk dapat ditulis lebih singkat dengan hanya menulis deretan ruas : $e_1$, $e_2$, …, $e_{n-1}$
atau deretan simpul : $v_1$, $v_2$, …, $v_{n-1}$, $v_n$
$v_1$ disebut simpul awal, $v_n$ disebut simpul akhir

Walk disebut tertutup bila $v_1 = v_n$ , dalam hal lain walk disebut terbuka, yang menghubungkan $v_1$ dan $v_n$

***Trail*** adalah walk dengan semua ruas dalam barisan berbeda.
***Path*** atau *jalur* adalah walk dengan semua simpul dalam barisan berbeda. Jadi path pasti trail, sedangkan trail belum tentu path.

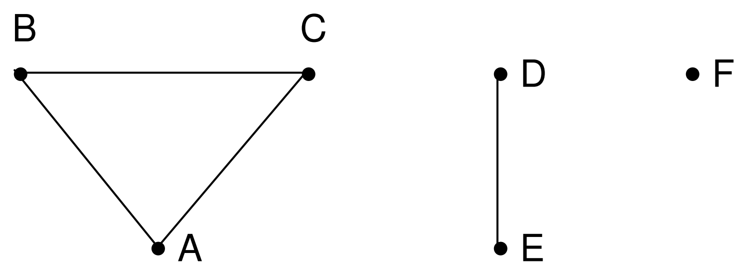
Dengan kata lain : Suatu path adalah suatu trail terbuka dengan derajat setiap simpulnya = 2, kecuali simpul awal $v_1$ dan $v_n$ simpul akhir berderajat = 1.
***Cycle*** atau *sirkuit* adalah suatu trail tertutup dengan derajat setiap simpul = 2.

**Contoh :**
Graf yang tidak mengandung cycle disebut acyclic, contoh : pohon atau tree.

Suatu graf G disebut *terhubung* jika untuk setiap 2 simpul dari graf terdapat jalur yang menghubungkan 2 simpul tersebut.

Subgraf terhubung suatu graf disebut komponen dari G bila subgraf tersebut tidak terkandung dalam subgraf terhubung lain yang lebih besar.

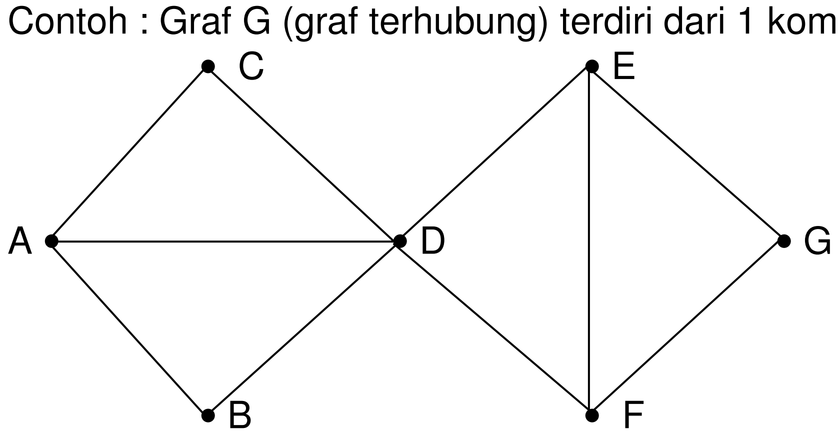
**Contoh :** Graf G terdiri dari 3 komponen




Terlihat misalnya antara D dan A tidak ada jalur.

***Jarak*** antara 2 simpul dalam graf G adalah panjang jalur terpendek antara ke-2 simpul tersebut.
***Diameter*** suatu graf terhubung G adalah maksimum jarak antara simpul-simpul G.

Contoh : Graf G (graf terhubung) terdiri dari 1 komponen




Jarak maksimum dalam graf G adalah 3 (yaitu antara A – G atau B – G ataupun C – G). Jadi diameter = 3.

Kalau order dari G = n, size dari G = e, dan banyaknya komponen = k, maka didefinisikan :
Rank(G) = n – k Nullity(G) = e – (n – k)

## MATRIKS PENYAJIAN GRAF

Pandang bahwa G graf dengan N simpul dan M ruas.
Untuk mempermudah komputasi, graf dapat disajikan dalam bentuk matriks, disebut *Matriks Ruas*, yang berukuran (2 x M) atau (M x 2) yang menyatakan ruas dari graf.

Matriks adjacency dari graf G tanpa ruas sejajar adalah matriks A berukuran (N x N), yang bersifat :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ bila ada ruas } (v_i, v_j) \\ 0, \text{ dalam hal lain} \end{cases}$$

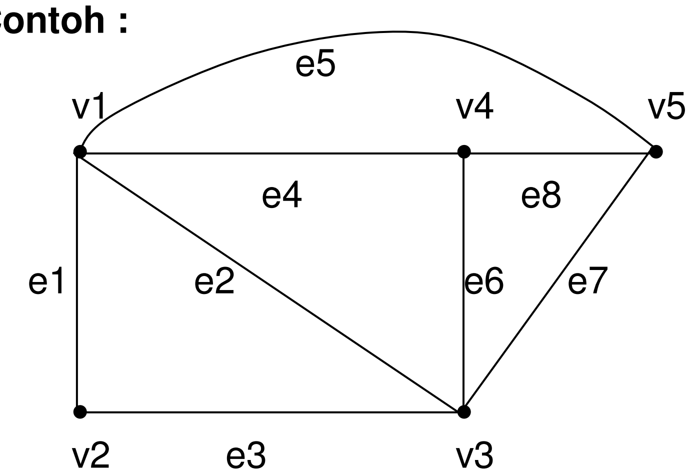
Matriks adjacency merupakan matriks simetri.
Untuk graf dengan ruas sejajar, matriks adjacency didefinisikan sebagai berikut :

$$a_{ij} = \begin{cases} p, \text{ bila ada p buah ruas menghubungkan } (v_i, v_j)\ (p > 0) \\ 0, \text{ dalam hal lain} \end{cases}$$

Matriks Incidence dari graf G, tanpa self-loop didefinisikan sebagai matriks M berukuran (N x M)

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ bila ruas } e_j \text{ berujung di simpul } v_i, \\ 0, \text{ dalam hal lain} \end{cases}$$

**Contoh :**




**Matriks Ruas**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

**Matriks Adjacency : N x N**

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & v1 & v2 & v3 & v4 & v5 \\
v1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
v2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
v3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
v4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
v5 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

**Matriks Incidence : N x M**

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 & e7 & e8 \\
v1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
v2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
v4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
v5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

**GRAF BERARAH (DIGRAF)**

Suatu graf berarah (digraf) D terdiri atas 2 himpunan :

1. Himpunan V, anggotanya disebut simpul
2. Himpunan A, merupakan himpunan pasangan terurut, yang disebut ruas berarah atau arkus.

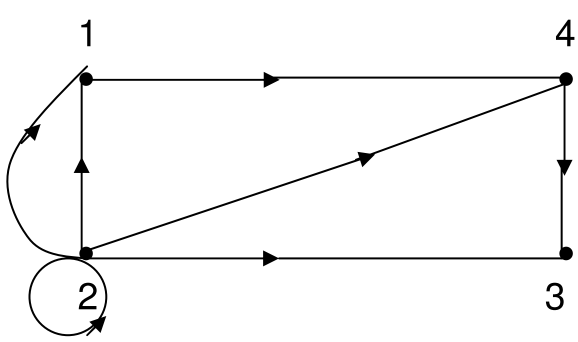
Notasi : D(V, A)

Simpul, anggota v, digambarkan sebagai titik (atau lingkaran kecil). Sedangkan arkus a=(u,v), digambarkan sebagai garis dilengkapi dengan tanda panah mengarah dari simpul u ke simpul v. Simpul u disebut titik pangkal, dan simpul v disebut titik terminal dari arkus tersebut.

**Contoh :**

Graf berarah D (V, A) dengan :

1. V mengandung 4 smpul, yaitu : 1, 2, 3 dan 4
2. A mengandung 7 arkus, yaitu : (1,4), (2,1), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (4,3).




Arkus (2, 2) : gelung / self loop

Arkus (2,1) : arkus sejajar / arkus berganda